פתרון לבחינה מ 28.04.26

שאלה 1

התשובה היא ג' (שלוש ושני שליש).

יש $\binom{5}{3} = 10$ קבוצות של שלושה צמתים. הקשת שמחברת את 1 ו 2 משתתפת בשלוש קבוצות כאלה. כל אחת משלושת קבוצות אלה היא משולש בסיכוי $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. כל אחת משבעת הקבוצות האחרות היא משולש בסיכוי $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

תוחלת מספר המשולשים היא $3 \cdot \frac{4}{9} + 7 \cdot \frac{1}{3}$.

שאלה 2

התשובה היא ב'.

התוחלת הלא מותנה של מספר המשולשים היא $\frac{2560}{1024} = \frac{10}{4} = \binom{5}{3} \cdot 0.5^3 + \binom{5}{3} \cdot 0.5^3$.

בהינתן שכל הקשתות צבועות בירוק התוחלת היא $10 = \binom{5}{3}$.

הסיכוי שכולן צבועות בירוק הוא $\frac{1}{1024} = 0.5^{10}$.

יהי a – התוחלת בהינתן שלא כל הקשתות צבועות בירוק.

נשתמש בעקרון התוחלת השלמה.

$$\frac{2560}{1024} = \frac{1}{1024} \cdot 10 + \left(1 - \frac{1}{1024}\right) a$$

<u>הערות</u>

יתכן שכל הקשתות צבועות בירוק. יתכן שיש קשתות משני הצבעים. יתכן שכל הקשתות צבועות בכחול. לכן אם ידוע שלא כל הקשתות צבועות בירוק, זה מגדיל את הסיכוי שיש קשתות משני הצבעים. זה פוסל מקרה שבו כולן ירוקות שבו יש הרבה משולשים. לכן זה מקטין את התוחלת.

שאלה 3

התשובה היא ב'

יש $125 = 5^3$ צירופי ערכים אפשריים שווי הסתברות של שלושת המשתנים.

יש $10 = \binom{5}{3}$ סדרות מונוטויות עולות.

ההסתברות היא $\frac{10}{125}$.

שאלה 4

התשובה היא ד'.

צריך ש X יקבל את הערך אפס, ש Y יקבל את הערך אחד וש Z יקבל ערך קטן מאחד (הוא בכל מקרה לא מקבל ערך שלילי). ההסתברות היא $0.5 \cdot 0.5(1 - e^{-1})$.

<u>שאלה 5</u>

<u>התשובה</u> היא ג'.

השונות של מספר ההופעות של סדרה שווה לסכום השונויות של האינדיקטורים של הופעתה במקומות השונים ועוד סכום השוניות המשותפות שביניהם. השונות של כל אינדיקטור היא בכל מקרה $\frac{1}{6^3}\left(1-\frac{1}{6^3}\right)$. שונות משותפת שווה לתוחלת מכפלת האינדיקטורים פחות מכפלת התוחלות. מכפלת התוחלות בכל מקרה שווה ל $\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6^3}$. לכן צריך להביא למינימום את תוחלת מכפלת האינדיקטורים. הערך הכי נמוך שהיא יכולה לקבל הוא אפס.
במקרה זה יש סכום של שני אינדיקטורים שמייצגים הופעה של הסדרה החל מהמקום הראשון והחל מהמקום השני. החיתוך ביניהם הוא ריק כאשר לא כל שלושת הערכים שבה הם שווים (במקרה זה הסדרה לא יכולה להופיע פעמיים רצוף). מספר הסדרות האלה הוא $216-6$.

<u>שאלה 6</u>

התשובה היא ד'.

יש דמיון לשיקולים של שאלה 5. כאן יכולה להיות שונות משותפת שונה מאפס גם בין אינדיקטורים שמייצגים הופעות של הסדרה במקומות שהמרחק בין התחלתם הוא שתיים ולא רק בין זוגות אינדיקטורים שמייצגים הופעה במקומות שהמרחק בין התחלתם הוא אחד. תנאי מספיק והכרחי לכך שהחיתוכים לא יהיו אפשריים הוא שהמקומות הראשון והשלישי בסדרה הם שונים. מספר הסדרות האלה הוא $216-36$.

<u>שאלה 7</u>

התשובה הי א'.

אם לאחר חמישים הטלות של הודל יש לו פחות הצלחות מאשר לקיין, אז לא יהיו לו בסך הכל יותר. אם לאחר חמישים הטלות של הודל יש לו יותר הצלחות מאשר לקיין, אז יהיו לו בסך הכל יותר. אם לאחר חמישים הטלות של הודל יש לו מספר שווה לזה של קיין, אז בסיכוי חצי יהיה לו בסך הכל יותר.
הסיכויים שלאחר חמישים הטלות יש לו מספר קטן יותר או גדול יותר הם שווים.
לכן השקלול לפי הסתברות שלמה נותן חצי.

<u>שאלה 8</u>

התשובה היא א'.

לגבי כל מספר טבעי שבין 1 ל n . נגדיר משתנה מקרי שייצג את ההפרש בין מספר ההצלחות של הודל בהטלה בודדת זו ומספר ההצלחות של קיין בהטלה בודדת זו.
להפרשים אלה יש תוחלת אפס ושונות קבועה. לפי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות הגבולית שסכום ההפרשים קטן מכל קבוע ממשי נתון שואפת לחצי (הפרש ששווה לקבוע שקול לממוצע הפרשים קרוב לאפס). לכן ההסתברות הגבולית שלאחר n הטלות של כל אחד מהם תפול כבר הכרעה היא אחד (ההסתברות הגבולית שההפרש יהיה בין אפס לחמש היא אפס). אם נפלה כבר הכרעה אז כל אחד מהם הוא המוביל בסיכוי חצי.

<u>שאלה 9</u>

התשובה היא ב'.

$$\int_0^\infty \int_y^\infty f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^\infty \int_y^\infty 2e^{-2y}e^{-x}dxdy = \int_0^\infty 2e^{-2y}\int_y^\infty e^{-x}dxdy =$$
$$= \int_0^\infty 2e^{-2y}\big(1-F_X(y)\big)dy = \int_0^\infty 2e^{-2y}e^{-y}dy = \frac{2}{3}\int_0^\infty 3e^{-3y}dy = \frac{2}{3}$$

<u>הערה</u>

לצורך חישוב אינטגרלים אפשר להשתמש בשיקולים הסתברותיים כמו שהאינטגרל על פונקצית הצפיפות החל מנקודה מסוימת שווה למשלים של פונקצית ההסתברות המצטברת או שהאינטגרל על פונקצית הצפיפות בכל התחום שווה לאחד.

<u>שאלה 10</u>

התשובה היא ב'.

אם למשל משתנה אחד מתפלג $U[1,5]$ ומשתנה שני מתפלג $U[8,9]$ אז המכסימום שלהם מתפלג $U[8,9]$.

המכסימום של שני משתנים גיאומטריים ב"ת אינו חסר זכרון. כדי שהמכסימום יקבל את הערך אחד, צריכים שני המשתנים לקבל את הערך אחד. אם נתון שהמכסימום גדול מלמשל שמונה, אז יתכן שאחד מהם קיבל ערך קטן משמונה, ואז כדי שהצלחה תקרה במקום התשיעי די בכך שהאחר יקבל את הערך תשע.

<u>שאלה 11</u>

$$E(YT) = P(Y=1)E(T|Y=1) + P(Y=2)E(2T|Y=2) =$$
$$= 0.5\cdot\frac{5+9}{2} + 0.5\cdot 2\cdot\frac{0+4}{2}$$

<u>הערה</u>

מכיון שהמשתנים הם מתואמים אז תוחלת המכפלה לא שווה למכפלת התוחלות (אם Y מקבל את הערך אחד אז T מקבל ערכים גבוהים ואם Y מקבל את הערך שתיים אז T מקבל ערכים נמוכים).