

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

יש להגיש את הבחינה באתר המודל עד שעה 12:30 בצהריים.
מותר לכל תלמיד להשתמש בשני דפי A4 הכתובים משני הצדדים.
אסור להשתמש במחשבי כיס.
בבחינה יש 6 שאלות. ענו על כל השאלות.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (50 נקודות)

נתונה קבוצה של 5 אנשים. כל זוג אנשים מכיר או לא מכיר אחד את השני. אם איש מסוים מכיר איש אחר אז גם האיש האחר מכיר אותו.
כל קבוצה של שלושה אנשים נקראת משולש, אם כל אחד מהשלושה מכיר כל אחד אחר מהשלושה או אם כל אחד מהשלושה לא מכיר אף אחד אחר מהשלושה.
נניח שכל זוג מהאנשים מכירים זה את זה בסיכוי 0.5 וזאת באופן ב"ת בזוגות האחרים.

- א. כמה משולשים יכולים להיות לכל היותר?
ב. מהי תוחלת מספר המשולשים? יש להגיע לתשובה סופית בצורת שבר פשוט.
ג. הודל וארדילס הם שניים מהאנשים.
מהי תוחלת מספר המשולשים בהינתן שהודל וארדילס מכירים אחד את השני?
ד. מהי תוחלת מספר המשולשים בהינתן שקיים לפחות זוג אחד של אנשים שמכירים אחד את השני?
ה. בסעיף זה לא נניח שכל זוג אנשים מכירים אחד את השני בסיכוי 0.5.
גם לא נניח שיש אי תלות בין זוגות שונים.
הראו ששונות מספר המשולשים קטנה מ 26.

שאלה 2 (10 נקודות)

האם ניתן לממש משתנה מקרי המתפלג $Bin(2,0.5)$ על-ידי מרחב מדגם שבו 5 נקודות?

שאלה 3 (10 נקודות)

נניח ש $X \sim Bin(2,0.5)$. האם קיים משתנה מקרי רציף Y המקיים $F_Y(a) = F_X(a)$ לכל a שלם?

שאלה 4 (10 נקודות)

כל אחד מ 20 אנשים מטיל פעמיים קוביה תקינה. נניח שתוצאות $20 \cdot 2 = 40$ ההטלות הן ב"ת. מהי ההסתברות שאצל אף אחד מהאנשים לא הסתכמו תוצאות שתי ההטלות ב 11?

שאלה 5 (10 נקודות)

נתונים כדים שבכל אחד מהם 4 כדורים כחולים ו 3 כדורים ירוקים. בכל יום מושכים מכד שני כדורים. תחילה מטיילים מטבע הוגן. אם מתקבלת תוצאת "עץ" אז בכל יום סופרים את מספר הכדורים הכחולים המתקבלים במשיכות עם החזרה של שני כדורים מתוך כד. אם מתקבלת תוצאת "פלי" אז בכל יום סופרים את מספר הכדורים הכחולים המתקבלים במשיכות ללא החזרה של שני כדורים מתוך כד. נניח שבהינתן תוצאת המטבע, התוצאות של הימים השונים הן ב"ת.

האם החוק החלש חל על סדרת התוצאות של הימים השונים ?

הערות

מטיילים רק פעם אחת מטבע. תוצאת המטבע הזה קובעת את צורת ההוצאות בכל הימים. בכל יום ניתן לקבל 0 או 1 או 2 כדורים כחולים. מספרי הכדורים הכחולים שמקבלים הם משתנים מקריים. השאלה היא אם החוק החלש חל על סדרת משתנים מקריים זו.

שאלה 6 (20 נקודות)

המספר 0 מסתיים באפס אחד. המספר 37085000700 מסתיים בשני אפסים.

בוחרים ללא החזרה 80 מספרים מתוך הקבוצה $\{0,1,2,\dots,99,100\}$ שבה 101 מספרים, ומכפילים זה בזה את המספרים שנבחרו.

א. מהי תוחלת מספר האפסים שבהם מסתיימת המכפלה, בהינתן שהמכפלה גדולה מ 0 ?
ב. מהי תוחלת מספר האפסים שבהם מסתיימת המכפלה ?
