

פתרון למבחן מ 11.10.26

שאלה 1 סעיף א'

ההתפלגות היא $Bin(9, 0.5)$ (כל הטלה החל מהשניה היא שונה מקודמתה בסיכוי חצי בלי קשר לתוצאת הקודמת).

שאלה 1 סעיף ב'

ההסתברות היא $0.6 \cdot 0.4 + 0.4^7 \cdot 0.6$ (דרוש ששבע פעמים תתקבל תוצאה אחת ובפעם השמינית תוצאה אחרת).

שאלה 1 סעיף ג'

פתרון בדרך ראשונה

בסיכוי 0.8 מקבלים בהטלה הראשונה "עץ" ואז מחכים לפלי, כאשר זמן צפיה זה מתפלג $G(0, 2)$. בסיכוי של 0.2 מקבלים בהטלה הראשונה "פלי" ואז מחכים ל"עץ" כאשר זמן צפיה זה מתפלג $G(0, 8)$. ההטלה הראשונה מתבצעת ורק אחריה יש זמן צפיה נוסף שמתפלג גיאומטרית. למשתנה גיאומטרי בעל פרמטר p יש תוחלת $\frac{1}{p}$.

לפי עקרון התוחלת השלמה התוחלת היא $0.2 \cdot \frac{1}{0.8} + 0.8 \cdot \frac{1}{0.2} + 1$.

פתרון בדרך שניה

מחכים לזמן המכסימלי בין קבלת "עץ" לקבלת "פלי". לגבי כל זוג משתנים כמו לגבי כל זוג מספרים, הסכום של המינימלי מביניהם והמכסימלי מביניהם שווה לסכום שלהם (אחד מהם הוא מינימלי ואחר הוא מכסימלי). סכום התוחלות של זמני הצפיה הוא $\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.2}$. כאן אחד מהם כבר יתרחש בהטלה הראשונה. לכן תוחלת המינימום היא 1 נחלץ את תוחלת המכסימום ונקבל $5.25 = 1 + \frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.8}$.

שאלה 1 סעיף ד'

מקבלים שמונה מהפכים בתשע הטלות אם יש תוצאה מסוימת בכל חמשת ההטלות האי זוגיות הראשונות ותוצאה אחרת בכל ארבעת הזוגיות הראשונות. כאן דרוש שבכל חמשת האי זוגיות הראשונות התקבל "עץ" ובכל הזוגיות התקבל "פלי". ההסתברות המותנה היא

$$\frac{0.3^5 \cdot 0.7^4}{0.3^5 \cdot 0.7^4 + 0.7^5 \cdot 0.3^4} = 0.3$$

שאלה 1 סעיף ה'

השונות של X גדולה יותר.

נפרק את מספר ההופעות של רצפים לסכום של אינדיקטורים. שונות הסכום של האינדיקטורים שווה לסכום השונות של האינדיקטורים ועוד פעמיים סכום השונות המשותפות. בשני המקרים לכל אינדיקטור יש שונות של $0.5 \cdot 0.5$. לכן סכום השונות הוא שווה. כל השונות המשותפות בין אינדיקטורים שאינם שכנים שוות לאפס (כי הם אינם תלויים). לגבי שונות משותפות בין אינדיקטורים שכנים המצב שונה. במקרה של רצף של "עץ" ולאחריו "פלי", לא יתכנו רצפים שכנים, לכן יש שונות משותפת שלילית. במקרה של שתי תוצאות "עץ" יש דוקא שונות משותפת חיובית. רצף במקום מסוים, מגדיל את הסיכוי לרצף במקום שכן.

שאלה 2

$$E(X^n) = \int_0^{1.1} f_X(x) x^n dx = \int_0^{1.1} \frac{1}{1.1} x^n dx = \frac{1.1^{n+1}}{(n+1)}$$

וגודל זה שואף לאין סוף כאשר $n \rightarrow \infty$.

הערה

הסבר אינטואיטיבי הוא שבסיכוי $\frac{1.1-1}{1.1-0}$ המשתנה X מקבל ערך גדול מאחד, ואם זה קורה אז תוחלת החזקה שואפת לאין סוף כאשר $n \rightarrow \infty$. לכן לפי עקרון התוחלת השלמה, התוחלת שואפת לאין סוף.

שאלה 3

עבור כל k נגדיר $Y_k = X_{2k} - X_{2k-1}$. המאורע $(\sum_{k=1}^{1200} X_{2k}) < (\sum_{k=1}^{1200} X_{2k-1}) + 20$

שקול למאורע ש $(\sum_{k=1}^{1200} X_{2k}) - (\sum_{k=1}^{1200} X_{2k-1}) < 20$ ששקול למאורע

$$(\sum_{k=1}^{1200} Y_k < 20) \text{ ששקול ל } \frac{\sum_{k=1}^{1200} Y_k}{1200} < \frac{20}{1200}$$

סדרת המשתנים $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת, שווי התפלגות בעל תוחלת אפס. לכל משתנה יש שונות ששווה לסכום שונויות של שני משתנים מהסדרה $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ שזה

$$2 \cdot \frac{(2-0+1)^2-1}{12} = \frac{4}{3}$$

לפי משפט הגבול המרכזי נקבל קירוב

$$\phi\left(\frac{\frac{20}{1200} - 0}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right) = \phi(0.5) \cong 0.6915$$

שאלה 4 סעיף א'

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P(X=Y=k) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 0.25 \end{aligned}$$

(הודות לאי תלות, הסתברות חיתוך שווה למכפלת ההסתברויות).

שאלה 4 סעיף ב'

התשובה היא 1.

המשתנה Y מקבל את הערך אחד בסיכוי קטן יותר מהמשתנה X . לכן יתכן שבכל מקרה ש Y מקבל את הערך אחד, גם X יקבל את הערך אחד.

שאלה 4 סעיף ג'

התשובה היא אחד ושליש.

רוצים שכאשר X מקבל את הערך 1, Y יקבל ערכים כמה שיותר קטנים. אבל X מקבל את הערך 1 בסיכוי חצי ו Y מקבל את הערך 1 רק בסיכוי שלישי. הוא מקבל את הערך 2 בסיכוי שתי תשיעיות. זאת אומרת שאפשרי שכאשר X מקבל את הערך 1, הוא יקבל רק ערכים של 1 ו 2. נדאג שיתקיים $P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3}$ ו $P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6}$. כך, בהינתן ש $X = 1$, יקבל Y את הערכים 1 ו 2 בסיכויים שני שלישי ושליש.

שאלה 5 סעיף א'

התשובה היא חצי.

משתנה אחד הוא סכום של חמישים הטלות ב"ת של מטבע הוגן. משתנה שני הוא סכום של ארבעים ותשע הטלות ב"ת של מטבע הוגן. אחרי ארבעים ותשע הטלות של כל צד, יש סיכוי שווה לכל צד להוביל. אם הראשון יוביל, אז הוא יוביל גם לאחר הטלה נוספת. אם השני מוביל, אז הראשון לא יוביל גם לאחר נוספת. אם יש שיוויון אז הראשון יוביל לאחר נוספת בסיכוי חצי. לפי חישוב הסתברות שלמה, הראשון יוביל לאחר הנוספת בסיכוי חצי.

שאלה 5 סעיף ב'

$$\begin{aligned} r(X, X + Y) &= \frac{\text{Cov}(X, X + Y)}{\sqrt{V(X)V(X + Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, X)}{\sqrt{V(X)(V(X) + V(Y))}} = \frac{V(X)}{\sqrt{V(X)(V(X) + V(Y))}} \\ &= \sqrt{\frac{V(X)}{V(X) + V(Y)}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{50 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 49 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = \sqrt{\frac{50}{99}} \end{aligned}$$
