

בחינה בהסתברות להנדסה ביו-רפואית

קורס 0555-1140
המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר לכל תלמיד להשתמש בשלושה דפי A4 הכתובים משני צדדיהם. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים. תלמידים הזכאים לשימוש בחומר עזר נוסף, רשאים להשתמש בדף נוסף. מותר להשתמש במחשב כיס.
ענו על כל ארבעת השאלות הראשונות.
על שאלה 5 רשאים לענות רק חברי קבוצה C של אנשי המילואים.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N + 3, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (50 נקודות)

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של מטבע שבכל הטלה מראה "עץ" בסיכוי p ומראה "פלי" בסיכוי $1 - p$.
כל הטלה החל מההטלה השניה היא מהפך אם ורק אם תוצאתה שונה מתוצאת ההטלה שקדמה לה.

- א. נניח ש $p = 0.5$. איך מתפלג מספר המהפכים בעשרת ההטלות הראשונות?
ב. נניח ש $p = 0.6$. מהי ההסתברות שמהפך יתקבל לראשונה בהטלה השמינית?
ג. נניח ש $p = 0.8$. מהי תוחלת מספר ההטלות עד וכולל ההטלה שבה נקבל לראשונה מהפך?
ד. נניח ש $p = 0.3$. מהי ההסתברות שההטלה הראשונה היתה "עץ" בהינתן שבתשע ההטלות הראשונות היו שמונה מהפכים?
ה. נניח ש $p = 0.5$. יהי X מספר הרצפים של פעמיים "עץ" בתשע ההטלות הראשונות. יהי Y מספר הרצפים של "עץ" ומיד לאחריו "פלי" בתשע ההטלות הראשונות. האם מתקיים $V(Y) = V(X)$?

שאלה 2 (10 נקודות)

יהי $X \sim U(0, 1.1)$ (משתנה מקרי אחיד רציף על קטע שאורכו 1.1).
מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X^n)$? (X^n היא החזקה ה- n של X).

שאלה 3 (10 נקודות)

יהיו $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים ב"ת ושויי התפלגות.
נניח ש $X_1 \sim U[0, 2]$ (אחיד בדיד).
למה בקירוב שווה $P\left(\sum_{k=1}^{1200} X_{2k} < \left(\sum_{k=1}^{1200} X_{2k-1}\right) + 20\right)$?

שאלה 4 (30 נקודות)

יהיו X, Y שני משתנים מקריים בעלי התפלגויות גיאומטריות.

נניח ש $X \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$ ו $Y \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$.

א. רק בסעיף זה נניח ש X, Y הם ב"ת.

מהו $P(X = Y)$?

ב. מהו הערך הכי קטן שיכול לקבל $E(X|Y = 1)$? (מדובר על תוחלת מותנה).

ג. מהו הערך הכי קטן שיכול לקבל $E(Y|X = 1)$? (מדובר על תוחלת מותנה).

שאלה 5

על שאלה זו רשאים לענות רק חברי קבוצה C של אנשי המילואים.
הציון שינתן לשאלה זו ישמש כציון מגן של עשרים אחוזים לציון הבחינה.

יהיו X, Y זוג משתנים מקריים ב"ת בעלי התפלגויות בינומיות.

נניח ש $X \sim \text{Bin}(50, 0.5)$, $Y \sim \text{Bin}(49, 0.5)$.

א. מהו $P(X > Y)$?

ב. מהו מקדם המתאם בין X ל $X + Y$?
